NULE FUNKCIJE I ZNAK FUNKCIJE

NULE FUNKCIJE

Nule funkcije su mesta gde grafik seče x osu a dobijaju se kao rešenja jednačine $y=0$ (to jest $f(x)=0$)

Mnogi profesori vole da se u okviru ove tačke nadje i presek sa y osom. Njega dobijamo kada u datoj funkciji stavimo da je $x=0$ (naravno , ako je 0 u oblasti definisanosti) i nadjemo vrednost za y.(to je ustvari $f(0)$)

ZNAK FUNKCIJE

Odredjivanje znaka funkcije je ustvari odredjivanje intervala u kojem je funkcija pozitivna i intervala u kojem je funkcija negativna.

Gde je $y>0$ tu je funkcija pozitivna a grafik iznad x ose.

Gde je $y<0$ tu je funkcija negativna a grafik je ispod x ose.

Kod odredjivanja znaka često koristimo tablicu ali je prethodno neophodno da i brojilac i imenilac rastavimo na činioce .

Nama je bitno da kod odredjivanja znaka zapamtite sledeće: **Pitamo se od čega nam zavisi znak funkcije !**

Izraz za koji smo sigurni da je pozitivan ne ulazi u razmatranje kod odredjivanja znaka!

Još jedna stvar, jesu Nule funkcije i Znak funkcije posebne tačke u ispitivanju funkcije ali su vezane za Oblast definisanosti i ostale tačke u ispitivanju…

To znači da nam svaka tačka priča neku priču ali je vezana za ostale tačke u ispitivanju.

Evo nekoliko primera .... (Naravno, uvek moramo prvo odrediti Domen, pa tek onda Nule i Znak....)

1. Odrediti Oblast definisanosti, Nule i Znak funkcija:

a) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$

b) $y=\dfrac{x^2-4}{9-x^2}$

v) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

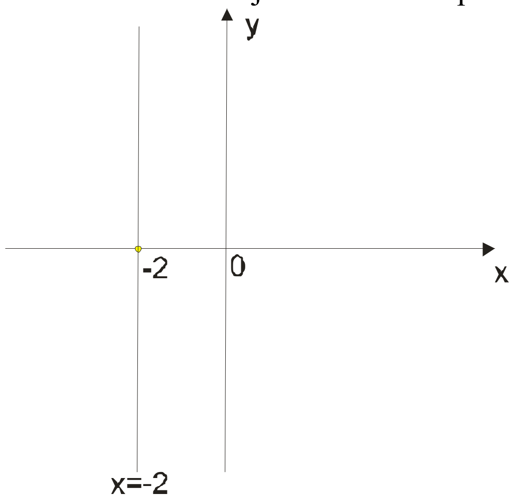
g) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$

Rešenja:

a) $y = \dfrac{x-1}{x+2}$

Domen

$x+2 \neq 0 \to x \neq -2 \to D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$
Ovo znači da funkcija u x = -2 ima potencijalnu vertikalnu asimptotu (pogledajmo sliku)



Nule funkcije

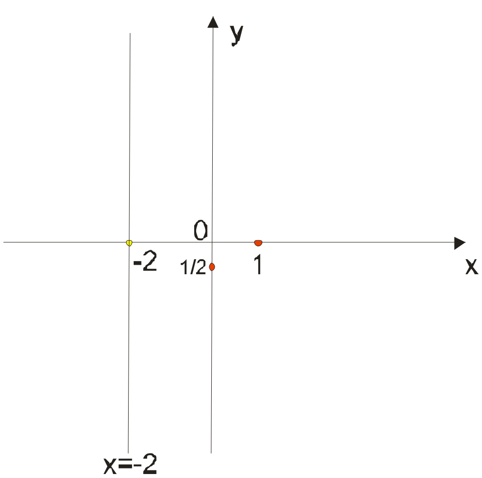
Znači rešavamo jednačinu y=0, to jest $\dfrac{x-1}{x+2} = 0$. Pazite, ovde samo brojilac izjednačavamo sa 0, jer smo se u Domenu već ogradili da u imeniocu ne sme da bude 0.

$\dfrac{x-1}{x+2} = 0 \to x-1 = 0 \to x = 1$ Funkcija seče x osu u tački x = 1.

Da vidimo gde seče y osu. Zamenimo da je x = 0.

$f(0) = \dfrac{0-1}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$

Na slici to bi izgledalo:



<u>Znak funkcije</u>

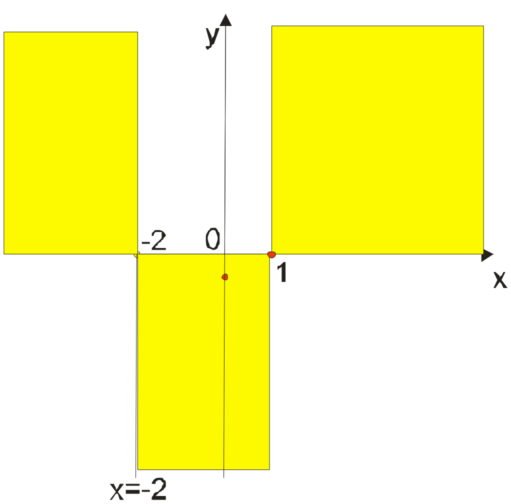
Rešavamo nejednačine $\frac{x-1}{x+2} > 0 \wedge \frac{x-1}{x+2} < 0$. Idemo tablično jer tako dobijamo oba rešenja odjednom.

	$-\infty$	-2	$1 \qquad \infty$
x-1	-	-	+
x+2	-	+	+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	-	+
	iznad x-ose	ispod x-ose	iznad x-ose

Zapisujemo:

$y > 0$ za $x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$
$y < 0$ za $x \in (-2, 1)$

A na grafiku bi ovo značilo:



Grafik funkcije je u žutim oblastima, u belim nema funkcije!

b) $y = \frac{x^2 - 4}{9 - x^2}$

<u>Domen</u>

$9 - x^2 \neq 0 \rightarrow (3-x)(3+x) \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$

Oblast definisanosti će biti: $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

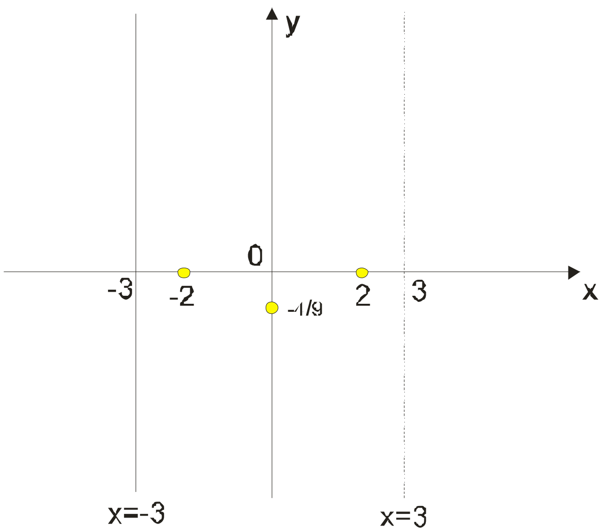
Nule funkcije

$$y=\frac{x^2-4}{9-x^2}=0 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow (x-2)(x+2)=0 \rightarrow x=2 \vee x=-2$$

Za sad znamo gde su potencijalne vertikalne asimptote i gde funkcija seče x osu.

Presek sa y osom je $f(0)=\frac{0^2-4}{9-0^2}=-\frac{4}{9}$

Pogledajmo sliku:

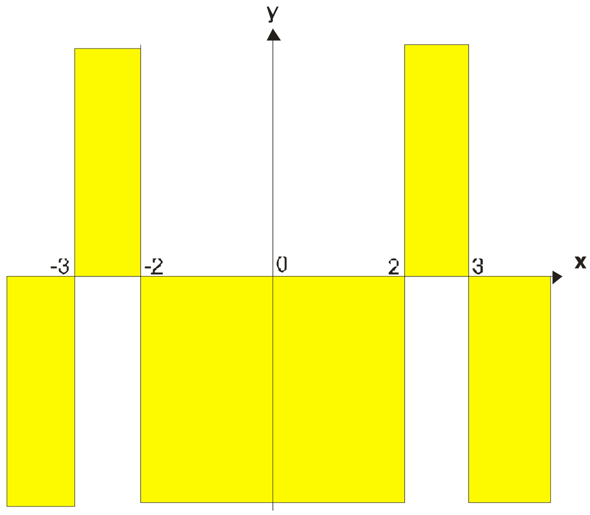


Znak funkcije

Rastavimo funkciju na činioce $y=\frac{x^2-4}{9-x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)}$ pa koristimo tablicu:

	-∞	-3	-2	2	3 ∞
x-2	-	-	-	+	+
x+2	-	-	+	+	+
3-x	+	+	+	+	-
3+x	-	+	+	+	+
y	-	+	-	+	-

Ovo bi na grafiku izgledalo:



v) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$

<u>Domen</u>

$x-2\neq 0 \rightarrow x\neq 2 \rightarrow D_f=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$

<u>Nule funkcije</u>

$x^2-5x+7=0$

Ova kvadratna jednačina nema realna rešenja, jer je $a>0 \wedge D<0$ a znamo da je onda $x^2-5x+7>0$.

Ovo znači da grafik nigde ne seče x osu!

Presek sa y osom je u $f(0)=\dfrac{0^2-5\cdot 0+7}{0-2}=-\dfrac{7}{2}=-3,5$.

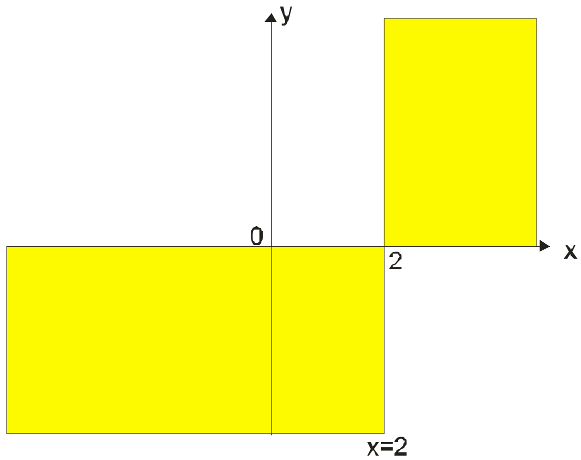
<u>Znak funkcije</u>

Pitamo se: od čega nam zavisi znak funkcije?

Zaključili smo u prethodnoj tački da je $x^2-5x+7>0$ uvek , pa nam znak funkcije zavisi samo od izraza $x-2$

$$y>0 \quad za \quad x-2>0 \rightarrow x>2$$
$$y<0 \quad za \quad x-2<0 \rightarrow x<2$$

To bi na grafiku izgledalo:



g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$

<u>Domen</u>

Kako je $x^2 + 1 > 0$ to je $D_f = (-\infty, \infty)$ što znači da funkcija nema vertikalnih asimptota.

<u>Nule funkcije</u>

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1$

Funkcija seče x osu u tački $(-1, 0)$

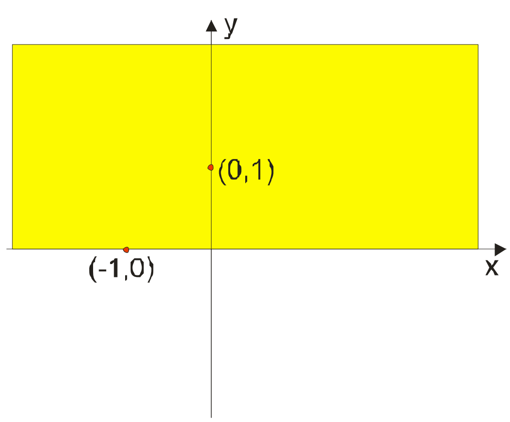
Presek sa y osom je u $f(0) = \dfrac{0^2 + 2 \cdot 0 + 1}{0^2 + 1} = 1$, znači u tački $(0,1)$.

<u>Znak funkcije</u>

Razmišljamo....

Kako je $x^2 + 1 > 0$ uvek i $(x+1)^2 \geq 0$ uvek , to zaključujemo da je funkcija uvek pozitivna (sem naravno u $(-1,0)$)

I da je ceo grafik iznad x ose.



2. Odrediti Oblast definisanosti, Nule i Znak funkcija:

a) $y = \ln\dfrac{2x-1}{x+3}$

b) $y = \dfrac{1}{\ln x - 1}$

Rešenje:

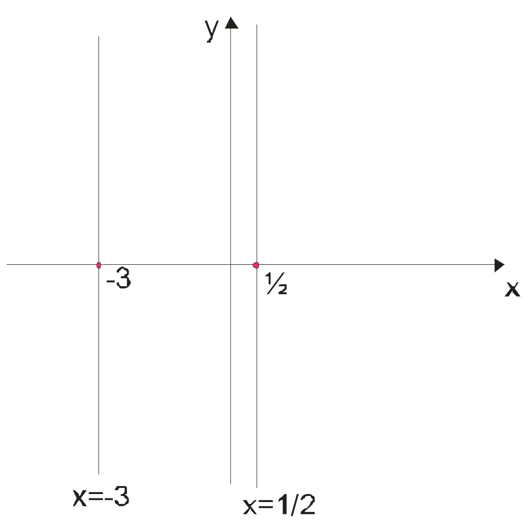
a) $y = \ln\dfrac{2x-1}{x+3}$

<u>**Domen**</u>

$\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$, rešavamo tablično:

	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$ ∞
$2x-1$	-	-	+
$x+3$	-	+	+
$\frac{2x-1}{x+3}$	+	-	+

$D_f = (-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ a na slici bi to izgledalo:



<u>**Nule funkcije**</u>

$y = 0 \rightarrow \ln\dfrac{2x-1}{x+3} = 0 \rightarrow \dfrac{2x-1}{x+3} = 1$ (Jer znamo da je $\ln 1 = 0$)

Sad rešimo ovu jednačinu i dobijamo $2x - 1 = x + 3 \rightarrow \boxed{x = 4}$

Presek sa y osom NE POSTOJI jer x = 0 nije u oblasti definisanosti!

<u>Znak funkcije</u>

Da se podsetimo najpre da važi:

$$y = \ln\Theta$$
$$y > 0 \;\; za \;\; \Theta > 1 \qquad \text{Ovo je uopšteno, gde je } \Theta \text{ bilo koja funkcija….}$$
$$y < 0 \;\; za \;\; 0 < \Theta < 1$$

Primenjeno na naš slučaj, imamo:

$$y > 0 \;\; za \;\; \frac{2x-1}{x+3} > 1 \to \frac{2x-1}{x+3} - 1 > 0 \to \frac{2x-1-x-3}{x+3} > 0 \to \frac{x-4}{x+3} > 0$$

Rešićemo ovo pa ćemo lako zaključiti gde je $y < 0$

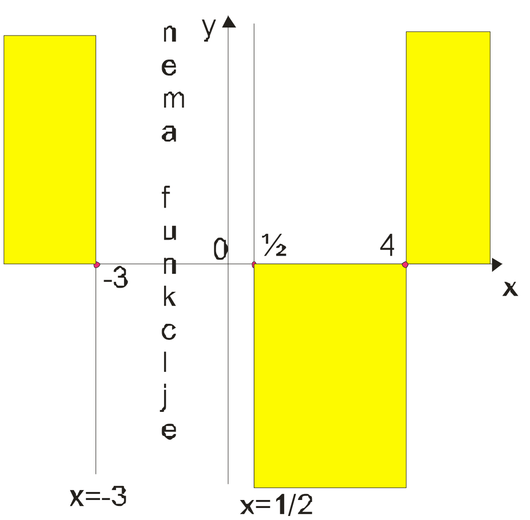
	$-\infty$ … -3	-3 … 4	4 … ∞
x-4	-	-	+
x+3	-	+	+
$\frac{x-4}{x+3}$	+	-	+

$$y > 0 \;\; za \;\; x \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$$

E sad , ne bi baš bilo najbolje da zapišemo da je $y < 0 \;\; za \;\; x \in (-3, 4)$ zato što funkcija nije tu svuda definisana, već

moramo: $y < 0 \;\; za \;\; x \in (\frac{1}{2}, 4)$

Još da vidimo šta do sada znamo vezano za crtanje grafika:

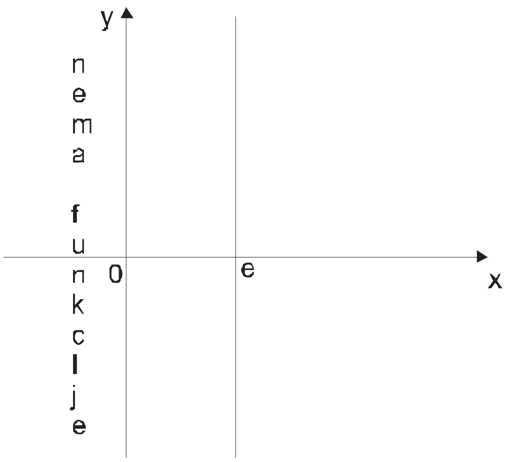


b) $y = \dfrac{1}{\ln x - 1}$

Domen

Zbog razlomka je $\ln x - 1 \neq 0 \rightarrow \ln x \neq 1 \rightarrow x \neq e$ a pošto ima i ln funkcija, mora biti $x > 0$, tako da je :

$D_f = (0,e) \cup (e,\infty)$ a na slici za grafik nam je:



Nule funkcije

Ne postoje nule funkcije (odnosno, nema preseka sa x osom) jer mi samo brojilac izjednačavamo sa 0 a u brojiocu je 1. Ne postoje ni preseci sa y osom jer 0 nije u oblasti definisanosti.

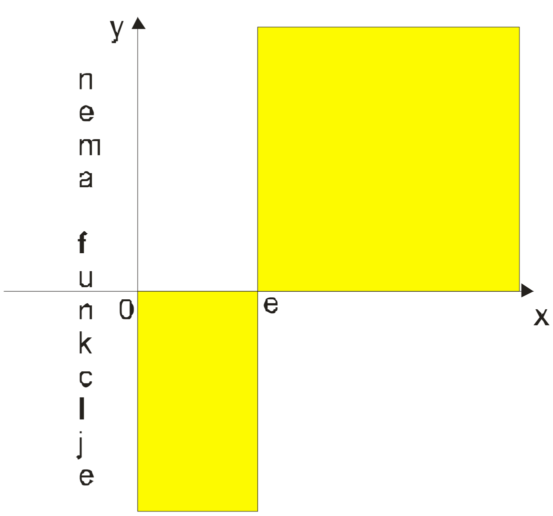
Znak funkcije

Znak funkcije nam zavisi samo od izraza u imeniocu, pa je:

$y > 0 \;\; za \quad \ln x - 1 > 0 \rightarrow \ln x > 1 \rightarrow x > e$

$y < 0 \;\; za \quad \ln x - 1 < 0 \rightarrow \ln x < 1 \rightarrow x < e \rightarrow x \in (0,e)$

a na grafiku bi bilo:



3. Odrediti Oblast definisanosti, Nule i Znak funkcija:

a) $y = \frac{e^x}{x-1}$

b) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

Rešenje:

a) $y = \frac{e^x}{x-1}$

<u>Domen</u>

Rekli smo da je funkcija e^x svuda definisana, tako da nam samo smeta razlomak:

$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

<u>Nule funkcije</u>

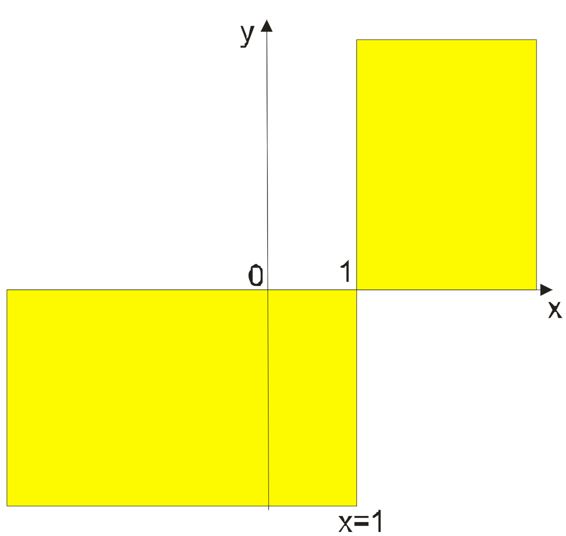
Kako je $e^x > 0$ uvek zaključujemo da ova funkcija nema nule, a presek sa y osom je $f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$.

<u>Znak funkcije</u>

Razmišljamo : od čega nam zavisi znak funkcije? Rekosmo da je $e^x > 0$ uvek , tako da znak zavisi samo od $x-1$.

$y > 0 \ \ za \ \ x-1 > 0 \rightarrow x > 1$
$y < 0 \ \ za \ \ x-1 < 0 \rightarrow x < 1$

Za sada znamo da grafik izgleda:



b) $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

<u>Domen</u>

Ovde nam jedino smeta razlomak u izložiocu $\to x \neq 0 \to D_f = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

<u>Nule funkcije</u>

E ovde sad nastaju problemi….

Jednačinu $e^{\frac{1}{x}} - x = 0$ ne možemo (ili je bolje reći da ne umemo) da rešimo (uči se samo na pojedinim fakultetima) .

Šta raditi u takvim situacijama?

Razdvojimo funkcije:

$e^{\frac{1}{x}} = x$

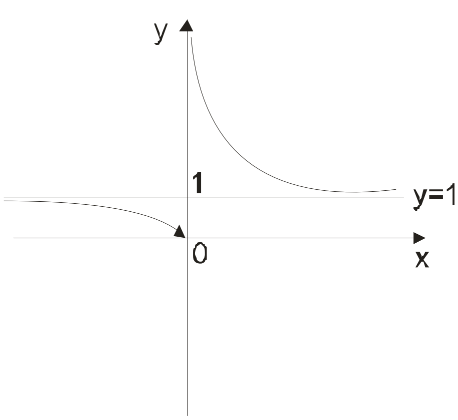
Neka je $y_1 = e^{\frac{1}{x}}$ i $y_2 = x$.

Ideja je da nacrtamo posebno ova dva grafika I da vidimo na toj slici da li ima mesta gde se oni seku….

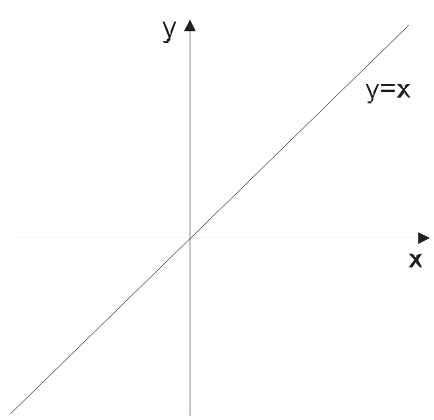
E sad, $y_2 = x$ je lako nacrtati , to je prava koja je simetrala I i III kvadranta.

Za $y_1 = e^{\frac{1}{x}}$ bi morali da ispitujemo sve tačke kao da je nova funkcija: Domen, Nule …..

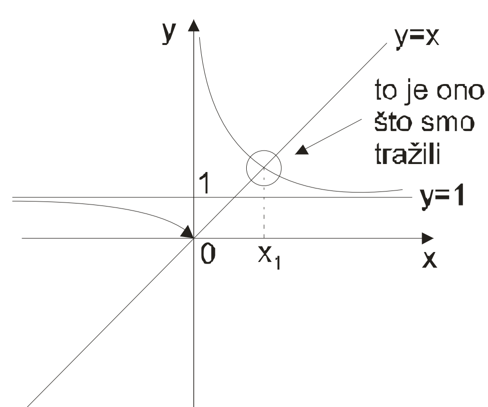
Mi ćemo vam odmah dati konačne grafike budući da u ovom fajlu radimo samo Nule i Znak funkcije.



slika 1



slika 2



slika 3

Na slici 1. je grafik funkcije $y_1 = e^{\frac{1}{x}}$, na slici 2. je grafik $y_2 = x$ a na slici 3. smo dobili mesto gde se ova dva grafika seku što je naša tražena NULA FUNKCIJE.

Radi preciznijeg crtanja početnog grafika možemo zaključiti da se naša nula nalazi izmedju 1 i 2 ili , ako hoćete još

preciznije $x_1 \in (1;1,5)$.

Sa slike 3. vidimo da je :

$$y > 0 \;\; za \;\; (-\infty, 0) \cup (0, x_1)$$
$$y < 0 \;\; za \;\; (x_1, \infty)$$

Presek sa y osom ne postoji jer x=0 nije u oblasti definisanosti.